MAI 1 - domácí úkol ze cvičení 2:

1. K „opakování“ - promyslete a zkuste pečlivě sepsat řešení aspoň jednoho z následujících problémků:

   (i) Zopakujte si princip důkazu matematickou indukcí a dokažte (užitím matematické indukce) následující tvrzení: Pro $n \in N, n \neq 3$ platí $2^n \geq n^2$.

   (ii) Ukažte, že platí (A, B, C jsou množiny) : a) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

   b) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

2. A dále promyslete a opět zkuste sepsat řešení aspoň jednoho z následujících příkladů, nebo si připravte otázky, pokud se řešení nepodaří (i to se hodnotí) :

   (i) Vyšetřete existenci suprema, infima, maxima, minima (v R) následujících množin (a sepište důkaz aspoň jednoho z vašich tvrzení) :

   a) $M_1 = \left\{1 - \frac{1}{n^2}; n \in N\right\}$; b) $M_2 = \left\{\frac{n + (-1)^n}{n}; n \in N\right\}$; c) $M_4 = \left\{n^2 - m^2; m, n \in N, n > m\right\}$;

   (ii). Ukažte, že pro neprázdné množiny A, B reálných čísel platí: $(\forall a \in A\ \forall b \in B : a \leq b) \Rightarrow (\sup A \leq \inf B)$.

   (iii) Nechť podmnožiny A, B množiny reálných čísel jsou neprázdné a omezené. Co lze říci o supremu a infimu množin $A \cup B$ a $A \cap B$. „Vaše“ tvrzení dokažte!

3. Dokažte užitím definice limity posloupnosti aspoň jednu z limit (a důkaz podrobně napište):

   a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sin n = 0$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$.

nebo

3. Dokažte, že platí (důkaz opět sepište podrobně):
   Jestliže existuje $n_0 \in N$ tak, že pro všechna $n > n_0$ je $a_n \leq b_n$ a $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, pak také $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$.

   A odtud lze snadno spočítat $\lim\limits_{n\to\infty} n(2 - \sin n)$ nebo $\lim\limits_{n\to\infty} (n^2 + \cos n)$.

1. Zkuste vypočítat limity:

   a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2 - 1}{2n^3 - 3n + 1}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^n + n!}{-2^n + 3 \cdot n!}$;

   b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$;

   c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 + 1}\right)$ nebo $\lim\limits_{n\to\infty} n \cdot \left(\sqrt{n^2 + 1} - n\right)$.